

文章编号 1004-924X(2009)08-1798-06

带有补偿器的液晶相位可变延迟器

张 颖, 赵海博

(北京航空航天大学 仪器科学与光电工程学院精密光机电一体化技术教育部重点实验室, 北京 100191)

摘要: 为了能够测量带有补偿器的液晶相位可变延迟器(LCVR)在不同电压值下的相位延迟, 提出了一种基于斯托克斯矢量和穆勒矩阵的测量方法。在可见光范围内 6 个波长下实验测量了 LCVR 在 2 kHz 方波、0~10 V 电压下的相位延迟。结果表明, LCVR 具有调谐电压低、控制简单、调节范围大、无需转动等优点, 相位延迟的测量误差 $<0.6\%$ 。根据延迟器件的特性, 建立了相位延迟的拟合函数公式, 采用最小二乘曲线拟合的方法得到了延迟器件工作范围内全部波长、全部电压值下的相位延迟, 曲线拟合的标准差 $<0.02\lambda$ 。提出的测量方法、测量结果和拟合函数的建立对偏光器件的研究有一定的参考价值。

关键词: 液晶相位可变延迟器; 补偿器; 斯托克斯矢量; 穆勒矩阵; 曲线拟合

中图分类号: O753.2; TN761 **文献标识码:** A

Liquid crystal variable retarder attached with compensator

ZHANG Ying, ZHAO Hai-bo

(Key Laboratory of Precision Opto Mechtronics Technology, Ministry of Education, School of Instrumentation Science & Opto electronics Engineering, Beihang University, Beijing, 100191, China)

Abstract: A new method is presented based on a Stokes vector and a Mueller matrix to measure the retardation of a Liquid Crystal Variable Retarder (LCVR) attached with a compensator, a 2 kHz square wave with the adjustable amplitudes 0~10 V is used to control the LCVR and the retardation is measured at six wavelengths in a visible region. The experimental results show that the LCVR has the advantages of low voltage controlling, simple operation, wide adjustment ranges and no mechanical rotating, and the error of measurement is less than 0.6%. The fitting function is established based on the characteristics of the retarders, and the retardations of all wavelengths and all voltages in the working condition of the retarders are obtained by the least-square curve fitting. The standard error of curve fitting is less than 0.02 λ . The measurement method, experimental results and the fitting function provide a reference for the polarization device research.

Key words: liquid crystal variable retarder; compensator; Stokes vector; Mueller matrix; curve fitting

收稿日期: 2008-08-18; 修订日期: 2008-08-27.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(No. 60678030)

1 引言

液晶相位可变延迟器(LCVR)是基于液晶的电控双折射特性制成的光学器件,使用向列型液晶材料,各向异性的向列型液晶分子具有单轴双折射效应,当加上适当电压时,液晶分子开始翻转,双折射效应慢慢减小,相位延迟也随之逐渐变小,从而实现对入射光波的相位调制作用^[1]。为了使 LCVR 能够达到 0° 或 $<0^\circ$ 的相位延迟,需要将一个零级的石英波片补偿器附加在 LCVR 上。LCVR 具有无须机械转动、响应时间快、测量精度高等优点,在偏振光学领域有广泛的应用,例如空间光调制器、可调谐滤波器、可变衰减器、偏振仪等^[2],部分仪器在设计时需要使用带有补偿器的 LCVR。为了提高仪器的测试精度,精确测量带有补偿器的 LCVR 在不同电压值下的相位延迟是非常重要的。

测量相位延迟的方法很多,比如光谱扫描法、补偿法、光强法、相位调制法等^[3-4],但这些方法都只能针对单一延迟器件,LCVR 和补偿器作为整体装配成一个器件后,已无法拆开分别进行测量。但实际应用时人们更关心的是两个延迟器件整体产生的相位延迟而不是单个器件的相位延迟。

针对这个问题,本文提出了一种可以测量 LCVR 和补偿器整体相位延迟的方法。该方法利用斯托克矢量和穆勒矩阵推导出相位延迟的光强计算公式,实验测量了可见光范围内 6 个波长处 LCVR 在不同电压值下的相位延迟,该方法操作简单、测量精度较高。采用最小二乘曲线拟合的方法得到了 LCVR 和补偿器工作范围内(波长

400~700 nm,电压 0~10 V)全部波长、全部电压值下的相位延迟,拟合函数是根据 LCVR 和补偿器的特性推导出来的,拟合的效果较好。

2 测量原理

测量原理如图 1 所示,光源为竖直方向偏振的可调谐氩氪离子激光器,起偏器 P_1 和检偏器 P_2 为格兰泰勒棱镜,透光轴角度均为 90° 。本文使用 Meadowlark 公司的 LCVR,其补偿器是复合零级波片,LCVR 快轴角度为 45° ,放置在 P_1 和 P_2 的中间,驱动为 2 kHz 交流方波、幅值 0~10 V 的电压,驱动电路由计算机控制,采用 Newport 的 190C 型号的光功率计,通过计算机串口通讯读取数据。

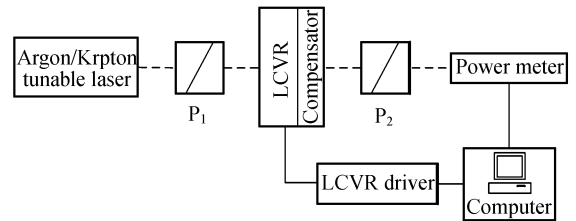


图 1 测量带有补偿器的 LCVR 相位延迟示意图

Fig. 1 Experimental setup to measure retardation of LCVR attached with compensator

偏振光学中,琼斯矢量与琼斯矩阵的元素中存在复数,这给矩阵运算带来了麻烦,而斯托克斯矢量与穆勒矩阵的元素全是实数,且有不少元素为零,运算起来也不麻烦,因此本文利用斯托克斯矢量与穆勒矩阵推导相位延迟的计算公式。根据文献^[5],延迟器件的穆勒矩阵为:

$$M_{LCVR} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2 2\theta + \sin^2 2\theta \cos \delta & \sin 2\theta \cos 2\theta (1 - \cos \delta) & -\sin 2\theta \sin \delta \\ 0 & \sin 2\theta \cos 2\theta (1 - \cos \delta) & \sin^2 2\theta + \cos^2 2\theta \cos \delta & \cos 2\theta \sin \delta \\ 0 & \sin 2\theta \sin \delta & -\cos 2\theta \sin \delta & \cos \delta \end{pmatrix}, \quad (1)$$

设 LCVR 的快轴角度和相位延迟分别为 θ_1 、 δ_1 ，补偿器的快轴角度和相位延迟分别为 θ_2 、 δ_2 ，

补偿器快轴角度与 LCVR 的快轴角度正交， $\theta_2 = \theta_1 + \pi/2$ ，则 LCVR 与补偿器整体的穆勒矩阵为：

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_C \times \mathbf{M}_{LCVR} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2 2\theta_1 + \sin^2 2\theta_1 \cos(\delta_1 - \delta_2) & \sin 2\theta_1 \cos 2\theta_1 [1 - \cos(\delta_1 - \delta_2)] & -\sin 2\theta_1 \sin(\delta_1 - \delta_2) \\ 0 & \sin 2\theta_1 \cos 2\theta_1 (1 - \cos(\delta_1 - \delta_2)) & \sin^2 2\theta_1 + \cos^2 2\theta_1 \cos(\delta_1 - \delta_2) & \cos 2\theta_1 \sin(\delta_1 - \delta_2) \\ 0 & \sin 2\theta_1 \sin(\delta_1 - \delta_2) & -\cos 2\theta_1 \sin(\delta_1 - \delta_2) & \cos(\delta_1 - \delta_2) \end{pmatrix} \quad (2)$$

$\delta_1 - \delta_2$ 为待测相位延迟，设 $\delta = \delta_1 - \delta_2$ ，LCVR 快轴角度为 45° ，即 $\theta_1 = 45^\circ$ 。光轴角度为 90° 的起偏器与检偏器的穆勒矩阵为^[6]：

$$\mathbf{M}_{P_1} = \mathbf{M}_{P_2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

设入射光光强为 I_0 ，则入射光 STOKES 矢量为 $\mathbf{S}_{in} = I_0 \times (1 \ -1 \ 0 \ 0)^T$ ，设 P_1 、LCVR、补偿器、 P_2 的透射率分别为 t_1 、 t_{LCVR} 、 t_C 、 t_2 ，则出射光的 STOKES 矢量为：

$$\mathbf{S}_{out} = t_2 \times \mathbf{M}_{P_2} \times t_C \times t_{LCVR} \times \mathbf{M}_{LCVR+C} \times t_1 \times \mathbf{M}_{P_1} \times \mathbf{S}_{in} = \frac{I_0 \times t_2 \times t_C \times t_{LCVR} \times t_1}{2} \times \begin{pmatrix} 1 + \cos(\delta) \\ -1 - \cos(\delta) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4)$$

STOKES 矢量第一个分量表示的是光强。设 $a = 1/2 \times I_0 \times t_2 \times t_C \times t_{LCVR} \times t_1$ ，出射光光强为 I ， $I = a \times (1 + \cos \delta)$ ，则计算相位延迟 δ 的公式为：

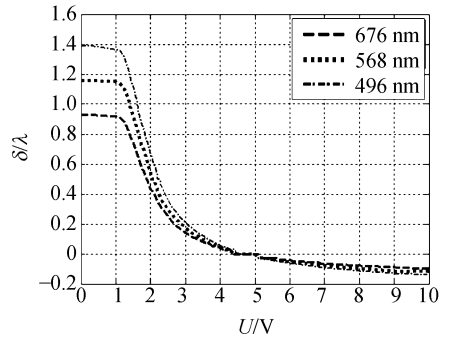
$$\delta = 2N\pi \pm \arccos\left(\frac{I}{a} - 1\right), \quad N = 0, 1, 2, \dots, \quad (5)$$

计算 δ 需先得到 a 值，连续调制 LCVR 所加电压值，由 $I = a \times (1 + \cos \delta)$ 可知，相位延迟为 0° 时，光强 I 有最大值 I_{max} ， $I_{max} = 2a$ ，则 $a = 0.5I_{max}$ ， a 值确定后，根据式(5)即可得到不同电压值下的相位延迟。

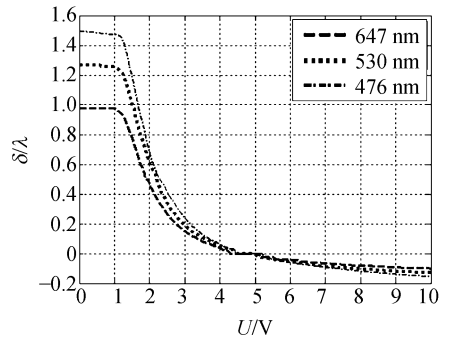
3 测量结果及误差分析

3.1 测量结果

实验选取 676、647、568、530、496、476 nm 等 6 个波长进行测量，测量结果如图 2 所示，从中可



(a) 676、568、496 nm



(b) 647、530、476 nm

图 2 不同波长时 LCVR 相位延迟与电压关系实验结果

Fig. 2 Experimental results of LCVR retardation performance versus applied voltages at different wavelengths

以发现：

- (1) 当 LCVR 所加电压超过阈值电压(约为 1.05 V)时，延迟量开始随着电压的升高而降低；
- (2) 在 1~5 V 之间，相位延迟为正，下降较快，>5 V 时，相位延迟为负，变化缓慢。相位延迟变化变缓是因为液晶分子转力矩与外加电场产生的转力矩逐渐达到平衡的结果^[7]；
- (3) 波长越长，相位延迟的绝对值越小，反之，波长越短，相位延迟的绝对值越大；

(4)LCVR 具有调谐电压低、控制简单、调节范围大、无需转动等优点。

3.2 误差分析

误差包括系统误差和随机误差^[8]。系统误差指激光偏振方向 α 的误差、起偏器与检偏器的消光比 ϵ 造成的测量误差、检偏器透光轴角度 φ 的误差、LCVR 快轴角度 θ 的误差;随机误差指探测器噪声引起的测量误差、光源的波动引起的测量误差。

3.2.1 系统误差

设激光器出射光偏振方向 α ,则激光器出射

的光偏振态为:

$$S_m = I_0 \times \begin{pmatrix} 1 \\ \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \\ \cos^2 \left(\alpha - \frac{\pi}{4} \right) - \sin^2 \left(\alpha - \frac{\pi}{4} \right) \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

起偏器与检偏器是同一型号的格兰泰勒棱镜,消光比近似相同。以起偏器的光轴角度为基准,消光比为 ϵ 、光轴角度为 φ 的检偏器穆勒矩阵为^[6]:

$$M_{P_1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \epsilon^2 & (1 - \epsilon^2) \cos(2\varphi) & (1 - \epsilon^2) \sin(2\varphi) & 0 \\ (1 - \epsilon^2) \cos(2\varphi) & (1 + \epsilon^2) \cos^2(2\varphi) + 2\epsilon \sin^2(2\varphi) & (1 - \epsilon^2) \sin(2\varphi) \cos(2\varphi) & 0 \\ (1 - \epsilon^2) \sin(2\varphi) & (1 - \epsilon^2) \sin(2\varphi) \cos(2\varphi) & 2\epsilon \cos^2(2\varphi) + (1 + \epsilon^2) \sin^2(2\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

根据式(1)~(7)可以求得在任意 $\alpha, \epsilon, \varphi, \theta$ 下相位延迟的表达式,因为表达式过于复杂,这里只给出简化形式 $\delta = \arccos[f(\alpha, \epsilon, \theta, \varphi, \delta_0) - 1]$,式中, δ_0 为真实的相位延迟, δ 为测量得到的相位延迟,没有系统误差时, $\delta = \delta_0$ 。假设 α, φ, θ 的系统误差分别为 $\Delta\alpha, \Delta\varphi, \Delta\theta$,根据误差理论^[8],按照测量误差的定义计算相位延迟的系统误差 $\Delta\delta$ 为:

$$\Delta\delta = \arccos[f(\alpha + \Delta\alpha, \epsilon, \theta + \Delta\theta, \varphi + \Delta\varphi, \delta_0) - 1] - \arccos[f(\alpha, \epsilon, \theta, \varphi, \delta_0) - 1]. \quad (8)$$

相位延迟的相对误差为 $\Delta\delta/\delta$,本测量系统中, $\alpha = \varphi = 90^\circ, \theta = 45^\circ, \epsilon = 10^{-5}, \Delta\alpha = \pm 4.5^\circ, \Delta\varphi = \Delta\theta = \pm 2',$ 经过计算可得到图 3 所示的系统相对误差, $\delta_0 = 0.5\lambda$ 时,有最大相对误差 -0.075% ,从图中可以看出,除了 $\delta_0 = 0.5\lambda$ 附近区域,其它

区域的误差非常小。总体来讲,系统误差造成的相位延迟误差很小。

3.2.2 随机误差

探测器的噪声、光源的波动引起的误差为随机误差。本系统中探测器的不确定度为 1% ,光源波动约为 0.5% ,根据误差理论^[8],将式(5)分别对 I 和 a 求偏导数,可以得到相对测量误差 $\sigma\delta/\delta$:

$$\frac{\sigma\delta}{\delta} = \frac{1}{\delta} \sqrt{\left(\frac{\partial\delta}{\partial I} \sigma I\right)^2 + \left(\frac{\partial\delta}{\partial a} \sigma a\right)^2} = \frac{1}{\delta} \sqrt{\frac{(\sigma I)^2}{a^2 \left[1 - \left(-1 + \frac{I}{a}\right)^2\right]} + \frac{I^2 (\sigma a)^2}{a^4 \left[1 - \left(-1 + \frac{I}{a}\right)^2\right]}} \quad (9)$$

其中 $\sigma I = [(0.5\%)^2 + (1\%)^2]^{1/2} \times I, \sigma a = [(0.5\%)^2 + (1\%)^2]^{1/2} \times a,$ 不同的 I, a 对应不同的 $\sigma\delta/\delta$,根据实验数据计算得到 $\sigma\delta/\delta < 0.59\%$,减小噪声及光源波动带来测量误差的办法是多次测量求平均值,探测器暗电流为 $0.082 \text{ mW},$ 将公式(5)中的 I, a 多次测量求平均值并减去暗电流,可显著提高测量精度。

综合考虑系统误差和随机误差,得到相位延迟的总误差最大为 $[(\Delta\delta/\delta)^2 + (\sigma\delta/\delta)^2]^{1/2} \approx 0.6\%$ 。

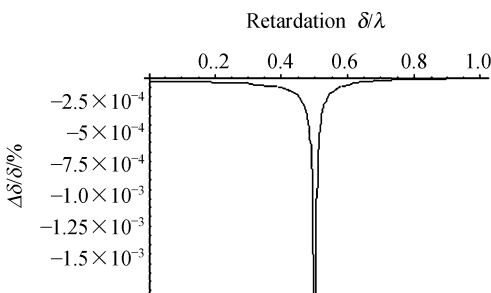


图 3 系统误差 $\Delta\delta/\delta$

Fig. 3 Systematic error $\Delta\delta/\delta$

4 曲线拟合

4.1 建立拟合函数

实验中选取的波长和电压值数量是有限的,为了得到 LCVR 和补偿器工作范围内(波长 400~700 nm,电压 0~10 V)全部波长、全部电压值下的相位延迟,本文采用了最小二乘曲线拟合的方法,拟合函数是根据 LCVR 和补偿器的特性推导出来的,下面详细阐述推导过程。

在电压作用下,液晶分子倾斜的角度是电压的函数,函数关系式为^[5,9]:

$$\beta(V) = \begin{cases} 0, & V \leq V_c \\ \frac{\pi}{2} - 2 \tan^{-1} \exp \left\{ - \left(\frac{V - V_c}{V_0} \right)^M \right\}, & V > V_c \end{cases} \quad (10)$$

表达式中 V 是加在 LCVR 上的电压, V_c 是液晶分子轴在电压作用下开始转动时的阈值电压,可通过实验得到, V_0 是一个常量, M 是一个经验值。LCVR 相位延迟的公式可表示为^[5]: $\delta = (B_0 t \sin^2 \alpha) / \lambda$, B_0 是液晶不加电压时的双折射率, t 是液晶的厚度, λ 是波长,在某一特定波长, $B_0 t / \lambda$ 是一个定值, α 是入射光与液晶分子轴的夹角, $\alpha = \pi/2 + \beta$, 本文使用的 LCVR 带有补偿器, 补偿器的相位延迟表达式为 $\delta_c = B_c t_c / \lambda$, B_c 、 t_c 分别是补偿器的双折射率和厚度。 $B_c t_c / \lambda$ 与 $B_0 t / \lambda$ 均可以用关于波长的二次函数来近似表示, 则带有补偿器的 LCVR 的相位延迟可以用以下拟合函数来表示:

$$\delta = \underbrace{\frac{B_c t_c}{\lambda}}_{\text{补偿器的相位延迟}} + \frac{B_0 t}{\lambda} \times \frac{1}{1 + \underbrace{\frac{1}{\left[2 \times \exp \left\{ - \left(\frac{V - V_c}{V_0} \right)^M \right\} \right]^2}}_{\text{LCVR 的相位延迟}}}, \quad (11)$$

$$\frac{B_c t_c}{\lambda} = A_c + B_c \lambda + C_c \lambda^2, \quad (12)$$

$$\frac{B_0 t}{\lambda} = A_H + B_H \lambda + C_H \lambda^2. \quad (13)$$

4.2 拟合结果

利用实验数据进行曲线拟合, 参数拟合的结果见表 1, 表 2 是在不同波长时相位延迟拟合结果的标准差, 图 4 是 530 nm 时的拟合曲线。从拟合的结果中可以看出, 相位延迟拟合的标准差

$< 0.02\lambda$, 拟合的效果较好。实际中大部分情况下有应用价值的相位延迟量在 $0 \sim \lambda/2$ 之间, 如果只针对这个延迟范围进行曲线拟合, 那么拟合精度会进一步提高。

表 1 参数拟合结果

| parameter | fitting result |
|-----------|----------------|
| A_c | -0.228 7 |
| B_c | 0.292 8 |
| C_c | -0.102 3 |
| A_H | 7.269 1 |
| B_H | -16.269 2 |
| C_H | 10.949 7 |
| V_0 | 0.35 |
| M | 0.45 |

表 2 不同波长时拟合结果的标准差

| Wavelength / nm | Standard deviation / λ |
|-----------------|--------------------------------|
| 476 | 0.017 9 |
| 496 | 0.017 8 |
| 530 | 0.019 4 |
| 568 | 0.018 7 |
| 647 | 0.013 3 |
| 676 | 0.012 9 |

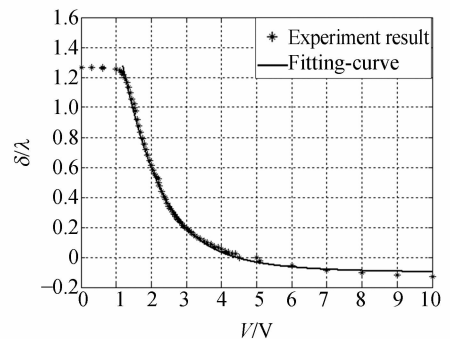


图 4 530 nm 时相位延迟的曲线拟合结果

Fig. 4 Curve fitting results of retardation at 530 nm

5 结论

本文提出了一种可以测量 LCVR 和补偿器

整体相位延迟的方法,测量了6个波长时LCVR在不同电压值下的相位延迟。该方法操作简单、测量精度较高,相位延迟的相对测量误差约为0.6%,实验结果表明LCVR具有调谐电压低、控制简单、调节范围大、无需旋转等优点。采用曲线

拟合的方法得到了LCVR工作范围内全部波长、全部电压值下的相位延迟,拟合效果较好,标准差 $<0.02\lambda$ 。测量方法、测量结果和拟合函数的建立为偏光器件的设计、制作和使用提供了一定的参考价值。

参考文献:

- [1] 刘伯晗,张健,吴丽莹.液晶空间光调制器的纯相位调制特性研究[J].光学精密工程,2006,14(2):213-217.
LIU B H, ZHANG J, WU L Y. Research of the phase-only modulation characterization of a liquid crystal spatial light modulator [J]. *Opt. Precision Eng.*, 2006,14(2):213-217. (in Chinese)
- [2] Meadowlark. *Liquid crystal variable retarders*[Z]. Meadowlark Catalog07-08.
- [3] 孙英姿,王东光,张洪起,等.红外波片相位延迟的测试方法及精度分析[J].光学学报,2006,26(5):685-688.
SUN Y Z, WANG D G, ZHANG H Q, et al.. Method and precision analysis for measuring retardation of infrared waveplate[J]. *Acta Optica Sinica*, 2006, 26(5):685-688. (in Chinese)
- [4] 张志勇,邓元勇,王东光,等.几种波片相位延迟测量方法的比较[J].光学精密工程,2007,15(11):1678-1685.
ZHANG ZH Y, DENG Y Y, WANG D G, et al.. Comparison and analysis of several methods for

- measuring waveplate retardation[J]. *Opt. Precision Eng.*, 2007,15(11):1678-1685. (in Chinese)
- [5] XIAO X F, VOELZ D, SUGIURA H. Field of view characteristics of a liquid crystal variable retarder[J]. *SPIE*, 2003,5158:142-150.
- [6] 廖延彪.偏振光学[M].北京:科学出版社,2003:57-63.
LIAO Y B. *Polarization Optics*[M]. Beijing: Science Press, 2003:57-63. (in Chinese)
- [7] 王宁,李国华,云茂金.液晶电控双折射特性的研究[J].光学学报,2002,29(12):1064-1066.
WANG N, LI G H, YUN M J. Voltage-dependent birefringence measurements of liquid crystals [J]. *Acta Optica Sinica*, 2002,29(12):1064-1066. (in Chinese)
- [8] 丁振良.误差理论与数据处理[M].哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,1992:50-53.
DING ZH L. *Error Theory and Data Processing* [M]. Harbin: Harbin Institute of Technology Press,1992:50-53. (in Chinese)
- [9] SALEH B A, TEICH M C. *Fundamentals of Photonics*[M]. America: John Wiley & Sons, Inc, 1991:721-728.

作者简介:



张颖(1979—),女,山西朔州人,工学博士,讲师,分别于2002年、2007年在北京理工大学获得学士、博士学位,主要从事光学设计、偏振探测、高光谱探测、光电探测等方面的研究。E-mail: yingzhang@buaa.edu.cn



赵海博(1983—),男,辽宁沈阳人,硕士研究生,2006年于北京航空航天大学获得学士学位,主要从事偏振光学方面的研究。E-mail: alabo_1983@sohu.com